# 作业七（提示）

## 练习8.1

3.(4)

收敛。

当 $n \geq 2$ 时，

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)n(n-1)\cdots 1} \leq \frac{1}{(n+1)(n-1)} \ .$$

容易验证，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} / \frac{1}{n^2} = 1 \ .$$

因此 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 具有相同的敛散性。由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ 也收敛。根据比较判别法，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 收敛。

7.(2)

发散。

这是因为 $\lim_{n\to\infty} \cos \frac{\pi}{3^n} = \cos 0 = 1 \neq 0$ 。

## 练习8.2

2.

(3)

发散。事实上，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+1/n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\ln n^{1/n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{(\ln n)/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{0}}=1\ .$$

因此原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有相同敛散性。故而。。。。

(11)

当 $a=0$ 时，易知原级数发散。

当 $0<a<1$ 时候，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$ ，因此原级数发散。

当 $a=1$ 时，易知原级数发散。

当 $a>1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}/\frac{1}{a^n}=\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{1}{a})^n+1}=1\neq 0$ ，根据比值判别法，原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 敛散性相同。注意到 $a>1$ ，我们可得此时原级数是收敛的。

4.

(7)

收敛。

令 $a_n=\frac{n!2^n}{n^n}$ 。则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)}=2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\ .$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1\ .$$

故而原级数是收敛的。

(9)

收敛。

令 $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n n!}$ 。则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3}\ .$$

因此原级数收敛。

## 练习8.3

2.(7)

绝对收敛。

注意到 $\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n(\ln n)^3}\right| \le \dfrac{1}{n(\ln n)^3}$ 。 对于任意 $N>1$ ，均有

$$\int_N^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_N^\infty \frac{1}{(\ln x)^3}\,\mathrm{d}\ln x = \int_{\ln N}^\infty \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u < \infty\ .$$

根据积分判别法， $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^3} < \infty$ 。因此原级数绝对收敛。

2.(9)

条件收敛。

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin a + (-1)^n n}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin a}{n^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n n}{n^2} = \sin a\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n n}{n^2}\ .$$

根据 莱布尼兹 判别法， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2}$ 收敛。 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ ，因此原级数收敛。注意到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin a+(-1)^n n}{n^2}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\left[n+(-1)^n\sin a\right]}{n^2}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^n\sin a}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}+\sin a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sin a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin a+(-1)^n n}{n^2}\right|$ 发散。从而原级数条件收敛但不绝对收敛。

## 练习8.4

1.

(3)

略。

(5)

略。

(7)

略。

4.

(3)

根据书中 287 页定理 8.10 ，易知收敛半径为 $1$ 。 对于边界上的情况，将 $x=1$ 和 $x=-1$ 分别带入，得到的级数都是发散的。

(6)

根据书中 287 页定理 8.10 ，易知收敛半径为 $\frac{1}{5}$ 。 对于边界上的情况，将 $x=\frac{1}{5}$ 带入，得到的级数是发散的（因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散）；将 $x=-\frac{1}{5}$ 带入，根据莱布尼兹判别法，所得到的级数收敛的。

5.

原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot 2^n)\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ ，是以 $x=\frac{1}{2}$ 为中心的。根据 Abel 判别法，

在 $x=-1$ 处，敛散性不能确定。

在 $x=1$ 处，绝对收敛。

在 $x=-\frac{1}{2}$ 处，绝对收敛。

在 $x=3$ 处，发散。

9.

(3)

将 $e^x$ 和 $e^{-x}$ 分别展开为幂级数，并化简即可。

收敛区域为 $(-\infty,\infty)$ 。

(6)

注意到

$$f(x)=\ln(1+x-2x^2)=\ln[(1-x)(1+2x)]=\ln(1-x)+\ln(1+2x)\ \square$$

分别进行幂级数展开即可。

13.(3)

直接按照定义即可。